Aufgabe 1: Grundlagen der Differentialrechnung (11 Punkte)

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(i) $w(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x$ ___ / 1 P.

(ii) $v(t) = \mathrm{e}^{-t}$ ___ / 1 P.

(iii) $u(v) = \dfrac{2v+3}{3v-2}$ ___ / 2 P.

(iv) $f(x) = (2x-3)^2 + (x-3)$ ___ / 2 P.

Aufgabe 1: Fortsetzung

(b) Die Gleichung der Tangente an die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

an der Stelle $x = 2$ lautet

[1 Kreuz]

- ○ $t(x) = \frac{1}{2}x$
- ○ $t(x) = 0.5x + 1$
- ○ $t(x) = 2x$
- ○ $t(x) = \frac{1}{2}x - 1$
- ○ $t(x) = 2x + 1$

___ / 2 P.

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$h(j) = \ln(j) \cdot \mathrm{e}^{5j}$$

___ / 3 P.

Aufgabe 2: Untersuchung von Funktionen (14 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^3 + \frac{9}{4}(x-2) + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(i) Bestimmen Sie die x-Koordinate des lokalen Maximums von f. ___ / 4 P.

(ii) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Wendepunkts von f. ___ / 1 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(b) Betrachten Sie für $x > 0$ die Funktion

$$g(x) = ax^2 + b(x-1)^3 + c\ln(x) + 2$$

(i) Bestimmen Sie die eindeutige Zahl a so, dass g an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle hat?

___ / 2 P.

(ii) Bestimmen Sie die eindeutige Zahl c so, dass g an der Stelle $x = 1$ eine horizontale Tangente hat?

(**Hinweis**: Falls Sie die erste Teilaufgabe (i) nicht lösen konnten nehmen Sie an, dass $a = -1$ lautet.)

___ / 3 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(c) In der Volkswirtschaftslehre ist das «Gesetz des abnehmenden Zusatznutzens» bekannt. Wirtschaftsnobelpreisträger Paul Samuelson formuliert dies in seinem Buch Volkswirtschaftslehre wie folgt:

«Der Gesamtnutzen steigt, wenn wir mehr von einem Gut konsumieren! Doch [...] steigt er in immer geringerem Ausmass, [...]. Der Anstieg des Gesamtnutzens verlangsamt sich, weil [...] der zusätzliche Nutzen durch die letzte von einem Gut konsumierte Einheit geringer wird. Der abnehmende Zusatznutzen ergibt sich aus der Tatsache, dass Ihre durch das betreffende Gut verursachte Freude und Befriedigung nachlassen, wenn Sie mehr und mehr davon konsumieren.»

Es sei G der Gesamtnutzen als Funktion der konsumierten Menge x.

(i) Wie lautet das Vorzeichen der ersten Ableitung von G?

Kreisen Sie die zutreffende Antwort klar erkenntlich ein.

positiv **negativ** ___ / 2 P.

(ii) Wie lautet das Vorzeichen der zweiten Ableitung von G?

Kreisen Sie die zutreffende Antwort klar erkenntlich ein.

positiv **negativ** ___ / 2 P.

Aufgabe 3: Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme (19 Punkte)

(a) Es sei die Nachfragefunktion gegeben durch $x(p) = 0.1p^{-5}$ mit $p > 0$.

(i) Berechnen Sie die Punktelastizität $\epsilon_{x,p}$. ___ / 3 P.

(ii) Wie gross ist $\epsilon_{x,p}$ bei einem Preis von $p = 5.5$? ___ / 1 P.

(b) Gegeben sei die Kostenfunktion $K(x) = 0.2x^3 - 2x^2 + 12x + 30$. Welcher der folgenden Werte kommt dem Betriebsoptimum am nächsten?

[1 Kreuz]

- ☐ 5.00
- ☐ 3.33
- ☐ 4.82
- ☐ 2.93
- ☐ 6.68

___ / 4 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(c) In einer Produktionsfirma sind folgende Daten bekannt: Die momentane Produktionsmenge sei $x = 250$, die momentanen Stückkosten seien $k(x) = \frac{K(x)}{x} = 22$, die Kostenfunktion sei linear und die Grenzkosten $K'(x) = 10$ somit konstant (d.h. die Kosten erhöhen sich um 10, wenn eine Einheit mehr produziert wird.)

(i) Wie viel betragen die momentanen Kosten $K(x)$ für $x = 250$, d.h. was ist $K(250)$?
___ / 1 P.

(ii) Wie viel betragen die Kosten, wenn die Produktionsmenge von $x = 250$ um 5 Einheiten erhöht wird? Mit anderen Worten was ist $K(255)$? ___ / 2 P.

(iii) Wenn die Produktion um $\Delta x > 0$ ausgeweitet wird, welcher der folgenden Ausdrücke stellt die neuen Stückkosten (d.h. nach Ausweitung der Produktion) richtig dar?

[1 Kreuz]

- ☐ $k(x + \Delta x) = \frac{K(x)}{x}$
- ☐ $k(x + \Delta x) = \frac{K(x)}{x+\Delta x}$
- ☐ $k(x + \Delta x) = \frac{K(x+\Delta x)}{x}$
- ☐ $k(x + \Delta x) = \frac{K(x+\Delta x)}{x+\Delta x}$
- ☐ $K(x + \Delta x) = \frac{k(x+\Delta x)}{x+\Delta x}$

___ / 3 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(iv) Um welche Menge $\Delta x > 0$ muss die momentane Produktionmenge $x = 250$ erhöht werden, damit sich die neuen Stückkosten (d.h. nach Erhöhung der Produktion) auf 20 reduzieren? ___ / 5 P.

Aufgabe 4: Funktionen in mehreren Variablen (14 Punkte)

Ein Verlag verkauft einen neuen Roman in zwei Ausführungen. Zum einen als Taschenbuch, zum anderen wird es auch als gebundenes Buch mit Einband angeboten.

Mit x wird die Anzahl der Taschenbücher, mit y die Anzahl der gebundenen Bücher bezeichnet.

Der Verlag geht davon aus, dass die Kosten- und die Gewinnfunktion gegeben sind durch:

$$K(x,y) = x^2 + xy + y^2$$
$$G(x,y) = 70x + 90y - 2x^2 - 4y^2 - 4xy$$

a) Geben Sie die partiellen Ableitungen G_x und G_y an. ___ / 4 P.

b) Geben Sie den Wert der partiellen Ableitung K_x im Punkt $P(3;4)$ an. ___ / 2 P.

c) Geben Sie die Erlösfunktion $E = E(x,y)$ an. ___ / 2 P.

Aufgabe 4: Fortsetzung

d) Die oben erwähnte Gewinnfunktion

$$G(x, y) = 70x + 90y - 2x^2 - 4y^2 - 4xy$$

besitzt genau eine stationäre Stelle S, welche ein Maximum ist. Bestimmen Sie diese stationäre Stelle S. ___ / 3 P.

e) Geben Sie einen rechnerischen Nachweis dafür an, dass es sich bei der stationären Stelle tatsächlich um ein Maximum handelt. ___ / 3 P.

Aufgabe 5: Unbestimmtes Integral (12 Punkte)

(a) Das unbestimmte Integral von

$$f(x) = 4x - \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

ist

[1 Kreuz]

- ○ $F(x) = 4 + \frac{2}{x^2} + C$
- ○ $F(x) = 4x^2 + \ln(2x) + C$
- ○ $F(x) = 2x^2 - 2\ln(x) + C$
- ○ $F(x) = 2x^2 + \ln(x^2) + C$
- ○ $F(x) = 4x - \ln(x^2) + C$

___ / 2 P.

(b) Die Ableitung von $f(x) = 5^{-x^2}$ ist $f'(x) = -2\ln(5)x \cdot 5^{-x^2}$. Das unbestimmte Integral von

$$g(x) = x \cdot 5^{-x^2}$$

ist daher

[1 Kreuz]

- ○ $G(x) = 5^{-x^2} + C$
- ○ $G(x) = -\frac{1}{2\ln(5)} 5^{x^2} + C$
- ○ $G(x) = \ln\left(\frac{2}{5}\right) 5^{-x} + C$
- ○ $G(x) = -2\ln(5) \cdot 5^{-x^2} + C$
- ○ $G(x) = -\frac{1}{2\ln(5)} 5^{-x^2} + C$

___ / 2 P.

Aufgabe 5: Fortsetzung

(c) Nur eine der folgenden Rechenregeln ist im allgemeinen korrekt. Welche?

[1 Kreuz]

- ○ $\int (x+1)^n dx = \left(\int (x+1)dx\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$
- ○ $\int (f(x)+g(x))^2 dx = \frac{1}{3}(f(x)+g(x))^3 + C$
- ○ $\int u(x)v(x)dx = \left(\int u(x)dx\right) \cdot \left(\int v(x)dx\right)$
- ○ $\int \sqrt{x}dx = \sqrt{\int x dx}$
- ○ $\int (af(x)+bg(x))\,dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx, \quad a,b \in \mathbb{R}$

___ / 2 P.

(d) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral von ___ / 3 P.

$$f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^5}}, \quad x > 0$$

Aufgabe 5: Fortsetzung

(e) Ermitteln Sie die Erlösfunktion $E(x)$ aus der Grenzerlösfunktion ___ / 3 P.

$$E'(x) = \frac{100}{(x-4)^2}, \quad x \neq 4$$

Aufgabe 6: Bestimmtes Integral (12 Punkte)

(a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale.

(i) $\int_{-3}^{3} \left(-5x^3 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x,$ ___ / 2 P.

(ii) $\int_{0}^{b} \left(3 - x^2\right)\mathrm{d}x, \qquad b > 0$ ___ / 2 P.

(iii) $\int_{0}^{1} a\sqrt{x}\mathrm{d}x, \qquad a > 0$ ___ / 2 P.

(iv) $\int_{0}^{1} \underbrace{(\mathrm{e}^x + \ldots + \mathrm{e}^x)}_{n-\text{Summanden}}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}$ ___ / 3 P.

Aufgabe 6: Fortsetzung

(b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -(x-2)^2 + 4$. Die endliche Fläche, welche der Graph von f und die x-Achse einschliessen beträgt

[1 Kreuz]

- ☐ 10.23
- ☐ $\frac{32}{3}$
- ☐ $\frac{40}{6}$
- ☐ 10.89
- ☐ $\frac{16}{3}$

___ / 3 P.

Aufgabe 7: Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (8 Punkte)

(a) Der Grenzgewinn, d.h. die Ableitung der Gewinnfunktion sei gegeben durch

$$G'(x) = \frac{1}{x+5}$$

und die Fixkosten betragen $K_{\text{fix}} = 10$.
Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$? ___ / 3 P.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = 1$ (und der Bedingung $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$) , welche die Punktelastizität

$$\frac{f'(x)}{f(x)}x = -x^5$$

aufweist.

[1 Kreuz]

- ☐ $f(x) = 5e^{-\frac{1}{5}x^5}$
- ☐ $f(x) = \ln(-\frac{1}{5}x^5)$
- ☐ $f(x) = e \cdot e^{-x^5}$
- ☐ $f(x) = e^{-\frac{1}{5}x^5}$
- ☐ $f(x) = e^{-x^4}$

___ / 5 P.

ENDE DER PRÜFUNG