Aufgabe 1: Grundlagen der Differentialrechnung (8 Punkte)

(a) Die Gleichung der Tangente an die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

an der Stelle $x = 0$ lautet

[1 Kreuz]

- ○ $t(x) = 2x - 2$
- ○ $t(x) = -x + 2$
- ○ $t(x) = \mathrm{e}^{-2x}$
- ○ $t(x) = -2x + 1$
- ○ $t(x) = x + 1$

___ / 2 P.

(b) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung

(i) $w(x) = x^4 + 2$ ___ / 1 P.

(ii) $v(w) = \ln(w)$ ___ / 1 P.

Aufgabe 1: Fortsetzung

(iii) $u(v) = \dfrac{3v-1}{3v+1}$ ___ / 2 P.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{3\ln(x^4+2)-1}{3\ln(x^4+2)+1}$$

Hinweis: Die Resultate aus Teilaufgabe (b) und die Kettenregel

$$\left[u(v(w(x)))\right]' = u'(v)v'(w)w'(x)$$

können Ihnen bei der Berechnung helfen. ___ / 2 P.

Aufgabe 2: Untersuchung von Funktionen (14 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x$$

(i) Auf welchem Intervall ist die Funktion f monoton fallend? __ / 3 P.

(ii) Auf welchem Intervall ist die Funktion f konvex gekrümmt? __ / 3 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$g(x) = (3x - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Die ersten beiden Ableitungen von g sind Ihnen gegeben durch

$$g'(x) = (5 - 3x) \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \text{und} \quad g''(x) = (3x - 8) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Ermitteln Sie für die Funktion g

(i) den Schnittpunkt P mit der y-Achse. __ / 1 P.

(ii) die Nullstelle/-n der Funktion. __ / 2 P.

(iii) die Extremalstelle/-n der Funktion. Geben Sie dabei mit an, welche Art (Minimum oder Maximum) bei einer Extemalstelle vorliegt. __ / 3 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(c) Eine Funktion $h = h(x)$ hat bei der Stelle $x = 5$ eine Wendestelle. Die Tangente an h bei $x = 5$ ist durch die Gleichung $y(x) = 7x - 9$ gegeben.

Von den folgenden Aussagen über die Funktion h sind vier Aussagen zutreffend. Lediglich eine Aussage kann nicht zutreffend sein und kreuzen Sie diese an.

[1 Kreuz]

- ◯ Die Funktion h hat bei $x = 5$ eine Nullstelle.
- ◯ Es ist $h(5) = 26$.
- ◯ Es ist $h'(5) = 7$.
- ◯ Die Funktion h ist bei $x = 5$ monoton wachsend.
- ◯ Es ist $h''(5) = 0$.

___ / 2 P.

Aufgabe 3: Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme (18 Punkte)

(a) Gegeben seien die Erlösfunktion

$$E(x) = -x^2 + 18x$$

und die Kostenfunktion

$$K(x) = x^3 - 8x^2 + 22x + 12$$

(i) Berechnen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$. ___ / 2 P.

(ii) Berechnen Sie die Break-even-Menge x_1 und die Gewinnzone $]x_1\,;\,x_2[$ in Intervallschreibweise. (Hinweis: Finden Sie ein Intervall $]x_1\,;\,x_2[$, sodass $G(x) > 0$ gilt für alle x innerhalb des Intervalls und ausserhalb $G(x) \leq 0$ gilt für $x \geq 0$.) ___ / 3 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(iii) Berechnen Sie die gewinnmaximierende Menge $x_{\max}$ und das Gewinnmaximum

$$G_{\max} = G(x_{\max})$$

___ / 5 P.

(b) Gegeben sei die Kostenfunktion

$$K(x) = x^3 - 2x^2 + 8x + 5$$

Welcher der folgenden Werte liegt am nächsten beim Betriebsoptimum?

[1 Kreuz]

- ☐ 2
- ☐ 3.4
- ☐ 1.8
- ☐ 2.6
- ☐ 0.5

___ / 4 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(c) Die Preiselastizität der Nachfrage $\varepsilon_{x,p}$ betrage -3. Um wie viel ändert sich näherungsweise die Nachfrage bei einer Preisreduktion von 2%?

[1 Kreuz]

- ◯ um 2
- ◯ um 6%
- ◯ sie bleibt unverändert
- ◯ um −6%
- ◯ um 6

___ / 2 P.

(d) Es sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^3}$ gegeben. Was ist die Punktelastizität $\varepsilon_{f,x}$ für $x > 0$?

[1 Kreuz]

- ◯ $3x$
- ◯ $-3x$
- ◯ e^x
- ◯ -1
- ◯ -3

___ / 2 P.

Aufgabe 4: Funktionen in mehreren Variablen (14 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Für welche der folgenden x und y Werte wird die Funktion f maximal?

[1 Kreuz]

- ◯ $x = 100$ und $y = 100$
- ◯ $x = 0$ und $y = 100$
- ◯ $x = 100$ und $y = 0$
- ◯ $x = 0$ und $y = 0$
- ◯ $x = 10$ und $y = 1000$

___ / 2 P.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$g(x, y) = 7^{(x-100)^2 + (y-100)^2}$$

Für welche der folgenden x und y Werte wird die Funktion g minimal?

[1 Kreuz]

- ◯ $x = 100$ und $y = 100$
- ◯ $x = 0$ und $y = 100$
- ◯ $x = 100$ und $y = 0$
- ◯ $x = 0$ und $y = 0$
- ◯ $x = 100$ und $y = 10$

___ / 2 P.

Aufgabe 4: Fortsetzung

(c) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 8y$.

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

und berechnen Sie die Koordinaten der stationären Stelle von f. ___ / 4 P.

(d) Handelt sich bei der stationären Stelle aus Teilaufgabe (c) um eine Maximum- oder eine Minimumstelle? ___ / 2 P.

(e) Für welche Werte von k besitzt die Funktion $f(x, y) = kx^2 + y^2 - 4xy$ im Punkt $(0, 0)$ einen Sattelpunkt? ___ / 4 P.

Aufgabe 5: Unbestimmtes Integral (12 Punkte)

(a) Welche der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x+5} - 7x \quad ?$$

[1 Kreuz]

- ○ $F(x) = \ln(x) - \frac{7}{2}x^2 + c$
- ○ $F(x) = \ln(x+5) - \frac{7}{2}x^2$
- ○ $F(x) = \ln(x+5) - 7x^2 + c$
- ○ $F(x) = \ln(x+5) + \frac{7}{2}x^2$
- ○ $F(x) = \ln(x) - \frac{7}{2}x^2$

___ / 2 P.

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + e^2\right) dx$$

___ / 3 P.

(c) Gegeben sei die Funktion

$$F(x) = 8\sqrt{x} + 3$$

Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$, sodass $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. ___ / 2 P.

Aufgabe 5: Fortsetzung

(d) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale.

(i) $\int \left(\frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$ ___ / 2 P.

(ii) $\int \left(-x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + \sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$ ___ / 3 P.

Aufgabe 6: Bestimmtes Integral (12 Punkte)

(a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale.

(i) $\int_{-3}^{3} (x^3 + x)\mathrm{d}x$ ___ / 1 P.

(ii) $\int_{0}^{z} (3x^2 + 5)\mathrm{d}x, \qquad z > 0$ ___ / 2 P.

(iii) $\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x, \qquad a \neq 0$ ___ / 2 P.

(iv) $\int_{0}^{2} |x^2 - 1|\mathrm{d}x$ ___ / 3 P.

Aufgabe 6: Fortsetzung

(b) Die Graphen der Funktionen $g(x) = 3$ und $f(x) = \frac{x^2}{3}$ schliessen ein endliches Segment S ein. Der Flächeninhalt von S beträgt

[1 Kreuz]

- ☐ 11.95
- ☐ 12
- ☐ 12.05
- ☐ 12.95
- ☐ 13

___ / 4 P.

Aufgabe 7: Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (12 Punkte)

(a) Welche der folgenden Funktionen löst die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = 3x \quad ?$$

[1 Kreuz]

- ◯ $x(t) = \ln(3t) + c$
- ◯ $x(t) = 3t + c$
- ◯ $x(t) = \ln(3t + c)$
- ◯ $x(t) = e^{3t+c}$
- ◯ $x(t) = e^{3t} + 1$

___ / 2 P.

(b) Welche der folgenden Funktionen löst die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x(t)} \quad ?$$

[1 Kreuz]

- ◯ $x(t) = \sqrt{t^2 + c}$
- ◯ $x(t) = t + 1$
- ◯ $x(t) = t^2 + c$
- ◯ $x(t) = \frac{1}{t^2+c}$
- ◯ $x(t) = \sqrt{t + c}$

___ / 2 P.

Aufgabe 7: Fortsetzung

(c) Es sei die Ableitung der Kostenfunktion gegeben durch

$$K'(x) = \frac{100}{x+1}$$

und die Fixkosten betragen $K_{fix} = 60$. Weiter sei der Grenzerlös

$$E'(x) = \frac{1000}{(x+2)^2}$$

gegeben.

(i) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

[1 Kreuz]

- ◯ Die Kosten $K(x)$ sind monoton wachsend und der Erlös ist monoton wachsend.
- ◯ Die Kosten $K(x)$ sind monoton fallend und der Erlös ist monoton wachsend.
- ◯ Die Kosten $K(x)$ sind monoton wachsend und der Erlös ist monoton fallend.
- ◯ Der Gewinn $G(x)$ ist monoton wachsend für $x < 7$.
- ◯ Der Break-Even Punkt liegt bei $x = 6.87$.

___ / 2 P.

(ii) Bestimmen Sie die Stammfunktion $E(x)$. ___ / 2 P.

(iii) Bestimmen Sie den Gewinn $G(x)$ an der Stelle $x = 6$. ___ / 4 P.

Aufgabe 7: Fortsetzung

ENDE DER PRÜFUNG