Aufgabe 1: Grundlagen der Differentialrechnung (12 Punkte)

a)	Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 = 2$ die Tangente $t(x) = 2 - 3x$. Dann gilt R F ❑ ❑ $f'(2) = -4$. ❑ ❑ $f'(2) = -3$. ❑ ❑ $f(2) = -4$. ❑ ❑ $f(2) = -3$.	____ / 3 P

b)	Die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ R F ❑ ❑ hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. ❑ ❑ ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend. ❑ ❑ hat eine horizontale Tangente bei $x = 0$. ❑ ❑ hat bei $x = 0$ ein globales Minimum.	____ / 3 P

Aufgabe 1: Fortsetzung

c)	Die Funktion $$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 0 \\ -2x + 2, & x > 0 \end{cases}$$ R F ☐ ☐ ist stetig auf $\mathbb{R}$. ☐ ☐ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$. ☐ ☐ hat ein globales Maximum bei $x = 0$. ☐ ☐ hat keine Nullstellen.	____ / 3 P

d)	Sei $f'(x) = x^3 - 3x - 2$. Dann gilt: R F ☐ ☐ f hat bei $x = -1$ eine konvex-konkav Wendestelle. ☐ ☐ f' hat an der Stelle $x = -1$ ein Maximum. ☐ ☐ f hat an der Stelle $x = -1$ einen Terrassenpunkt. ☐ ☐ f hat zwei Extremstellen.	____ / 3 P

Aufgabe 2: Untersuchung von Funktionen (16 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (1 - x)e^x$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f. ___ / 2 P

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse. ___ / 2 P

c) Bestimmen Sie die Extrempunkte (also x- und y-Koordinate) von f.
Zeigen Sie, ob es sich dabei um ein Minimum oder ein Maximum handelt. ___ / 4 P

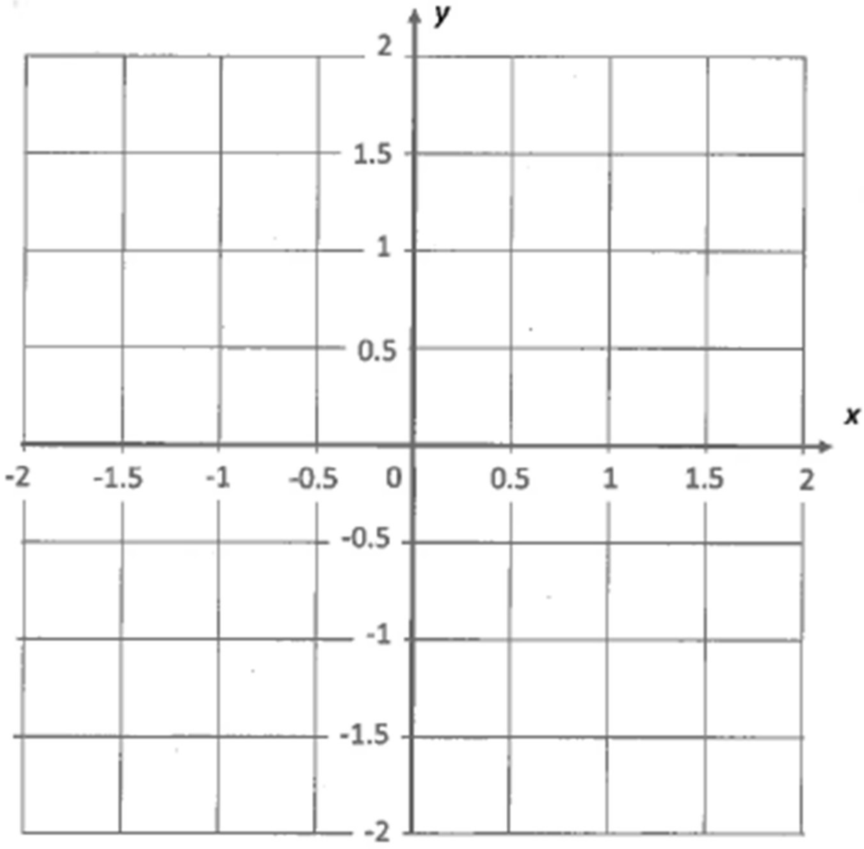
Aufgabe 2: Fortsetzung

d) Bestimmen Sie die Wendepunkte (also x- und y-Koordinate) von f. Zeigen Sie, ob es sich dabei um einen konkav-konvex oder konvex-konkav Wendepunkt handelt. ____ / 4 P

Aufgabe 2: Fortsetzung

e) Zeichnen Sie alle unter Teilaufgaben a-d) für die Funktion f berechneten Punkte im unten stehenden Koordinatensystem ein, beschriften Sie diese sinnvoll und skizzieren Sie danach den Graphen von f.

Tipp: Der Graph strebt für sehr grosse x-Werte gegen minus unendlich und für sehr kleine x-Werte gegen 0. ___ / 4 P



Aufgabe 3: Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme (1) (12 Punkte)

Die Preis-Absatz-Funktion eines Gutes ist gegeben durch die Gleichung:

$$p(x) = 50 - 0.025x$$

a) Bestimmen Sie die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises. ____ / 4 P

Aufgabe 3: Fortsetzung

b) Bei welchem Preis bewirkt eine Preissenkung von 1% eine Nachfragezunahme ungefähr von 1.5%? ___ / 4 P

Tipp: Verwenden Sie $\varepsilon_{x,p} = \frac{2p}{2p-100}$, wenn Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten. Dann gibt es für a) aber keine Punkte.

c) Bestimmen Sie den Preis, welcher den Erlös maximiert. ___ / 4 P

Aufgabe 4: Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme (2) (14 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung der kubischen Kostenfunktion, welche folgende Eigenschaften aufweist: ____ / 14 P

- Die Fixkosten betragen 2 GE.
- Die Schwelle des Ertragsgesetzes liegt bei $x_s = 6\ ME$.
- Das Betriebsoptimum liegt bei $x_O = 10\ ME$
- Die Grenzkosten bei einer Menge von $x_s = 6\ ME$ betragen $0.12\ GE/ME$.

Aufgabe 4: Fortsetzung

Aufgabe 5: Funktionen mehrerer Variablen (12 Punkte)

Eine Unternehmung produziert zwei Produkte X und Y. Die monatlichen Kosten (in CHF) für die Produktion von x Einheiten des Produktes X und y Einheiten des Produktes Y sind gegeben durch:

$$K(x,y) = 500 + 2x + 4y + 0.002x^2 + 0.002xy + 0.001y^2$$

Produkt X lässt sich für 6 CHF je Einheit am Markt absetzen, Produkt Y für 7 CHF je Einheit.

a) Stellen Sie die monatliche Gewinnfunktion $G(x,y)$ der Unternehmung auf. ___ / 2 P

Aufgabe 5: Fortsetzung

b) Geben Sie für die Gewinnfunktion alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung an. ____/ 4 P

Tipp: Verwenden Sie $G(x,y) = -0.001x^2 + 3x - 0.002xy + 4y - 0.002y^2 - 1000$, falls Sie Teilaufgabe a) nicht oder nur teilweise lösen konnten. Dann gibt es für a) aber keine Punkte.

$G_x =$

$G_y =$

$G_{xx} =$

$G_{xy} =$

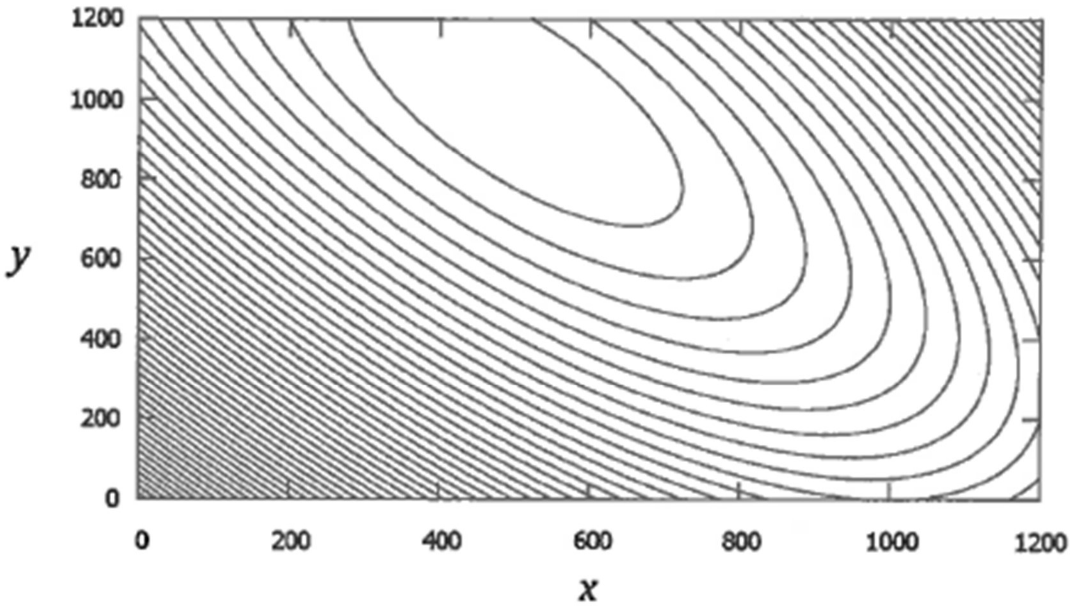
$G_{yy} =$

Aufgabe 5: Fortsetzung

c) Bestimmen Sie die gewinnmaximierenden monatlichen Produktionsmengen **und** zeigen Sie mittels der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, dass tatsächlich ein Gewinnmaximum vorliegt. ____ / 4 P

Aufgabe 5: Fortsetzung

d) Das folgende Diagramm zeigt die Niveaulinien der monatlichen Gewinnfunktion.



Nehmen Sie an, dass die Unternehmung aus Kapazitätsgründen maximal 200 Einheiten des Produktes Y pro Monat herstellen. Bestimmen Sie für diesen Fall grafisch die ungefähre gewinnmaximierende Menge des Produktes X. ____ / 2 P

Aufgabe 6: Grundlagen der Integralrechnung (1) (12 Punkte)

a)	Folgende Funktionen lösen die Differentialgleichung $$f'(x) = -3 \cdot f(x)$$ R F ❑ ❑ $\frac{1}{e^{3x}}$ ❑ ❑ $e^{-3(x-2)}$ ❑ ❑ $-e^{3x}$ ❑ ❑ e^{3x}	____ / 3 P

b)	Für jede beliebige Funktion g gilt: R F ❑ ❑ $\int_{-3}^{1} g(x)\,dx = \int_{3}^{1} g(x)\,dx$ ❑ ❑ $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{3} g(x)\,dx$ ❑ ❑ $\int_{3}^{1} g(x)\,dx = -\int_{1}^{3} g(x)\,dx$ ❑ ❑ $\int_{3}^{3} g(x)\,dx = -\int_{-1}^{-1} g(x)\,dx$	____ / 3 P

Aufgabe 6: Fortsetzung

c)	Gegeben ist die Funktion $$F(x) = \ln(15 + 5x) + 12.$$ Ist F eine Stammfunktion der unten aufgeführten Funktion f? R F ❑ ❑ $f(x) = \frac{1}{15 + 5x}$ ❑ ❑ $f(x) = \frac{1}{3 + x} + 12$ ❑ ❑ $f(x) = \frac{1}{3 + x}$ ❑ ❑ $f(x) = \frac{1}{15 + 5x} + 12x$	___ / 3 P

d)	Das bestimmte Integral $$\int_0^1 \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot e^x \, dx =$$ hat den Wert: R F ❑ ❑ $\frac{x^3}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^x$ ❑ ❑ $\frac{e}{4}$ ❑ ❑ $\frac{1}{4} + \frac{e}{4}$ ❑ ❑ $1 + \frac{e}{4}$	___ / 3 P

Aufgabe 7: Grundlagen der Integralrechnung (2) (12 Punkte)

a) Gegeben ist die Nachfragefunktion: ___ / 6 P

$$p_N(x) = -0.25x + 100 .$$

Die Angebotsfunktion ist gegeben mit:

$$p_A(x) = 0.5x + 10 .$$

Wieviel beträgt die Konsumenten- **und** die Produzentenrente im Marktgleichgewicht?

Aufgabe 7: Fortsetzung

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^8$ zwischen deren Schnittpunkten eingeschlossen wird. ____ / 6 P

(Achtung: Der Rechenweg, insbesondere das Finden der Stammfunktionen und deren Auswertungen müssen dokumentiert und nachvollziehbar sein.)

ENDE DER PRÜFUNG