

Aufgabe 1: Grundlagen der Differentialrechnung

(12 Punkte)

Von den pro Teilaufgabe fünf möglichen Antworten ist nur eine richtig und ergibt zwei Punkte. Kreuzen Sie jeweils die einzig richtige Antwort an.

a)	<p>Die Funktion</p> $f(x) = -e^{-x}$ <p>hat die Ableitung:</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = -e^{-x}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = e^{-x}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = -e^x$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = e^x$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = -(e^x)$</p>	<p><u> / 2 P </u></p>
----	--	-------------------------

b)	<p>Ist die Funktion</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 & -\infty < x < 1 \\ 2x - 1 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$ <p>an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar?</p> <p><input type="checkbox"/> Die Funktion f ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.</p> <p><input type="checkbox"/> Die Funktion f ist nur an der Stelle $x = 1$ differenzierbar.</p> <p><input type="checkbox"/> Die Funktion f ist an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.</p> <p><input type="checkbox"/> Die Funktion f ist ausser an der Stelle $x = 1$ überall differenzierbar.</p> <p><input type="checkbox"/> Die Funktion f ist ausser an der Stelle $x = 0$ überall differenzierbar.</p>	<p><u> / 2 P </u></p>
----	---	-------------------------

Aufgabe 1: Fortsetzung

c)	<p>Die Ableitung der Funktion</p> $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$ <p>ist:</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = \sqrt{6x}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = \frac{6x}{\sqrt{3x^2+5}}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = \frac{6x}{3x^2+5}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f'(x) = \sqrt{\frac{6x}{3x^2+5}}$</p>	<u> / 2 P</u>
----	--	----------------

d)	<p>Die Tangente an den Graphen der Funktion</p> $f(x) = x^3 - 2x$ <p>im Punkt (2; 4) wird beschrieben durch:</p> <p><input type="checkbox"/> $t(x) = 3x^2 - 2$</p> <p><input type="checkbox"/> $t(x) = 10x - 16$</p> <p><input type="checkbox"/> $t(x) = 10x + 16$</p> <p><input type="checkbox"/> $t(x) = 4$</p> <p><input type="checkbox"/> $t(x) = 0$</p>	<u> / 2 P</u>
----	---	----------------

Aufgabe 1: Fortsetzung

e)	<p>An welcher Stelle ist die Tangentensteigung der Funktion</p> $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ <p>gleich der durchschnittlichen Steigung auf dem Intervall $[0;3]$?</p> <p><input type="checkbox"/> $x_0 = 2.5$</p> <p><input type="checkbox"/> $x_0 = 2$</p> <p><input type="checkbox"/> $x_0 = 1.5$</p> <p><input type="checkbox"/> $x_0 = 1$</p> <p><input type="checkbox"/> Eine solche Stelle existiert nicht.</p>	<u> / 2 P</u>
----	--	----------------

f)	<p>Wie sieht der Funktionsterm von g aus, wenn $g(2) = 0$ und $g'(x) = f'(x)$, wobei $f(x) = -3x^2$?</p> <p><input type="checkbox"/> $g(x) = -x^3 + C$ für jede beliebige reelle Konstante C</p> <p><input type="checkbox"/> Darüber kann keine Aussage gemacht werden.</p> <p><input type="checkbox"/> $g(x) = -3x^2 + C$ für jede beliebige reelle Konstante C</p> <p><input type="checkbox"/> $g(x) = -3x^2 + 12$</p> <p><input type="checkbox"/> $g(x) = -6x + 12$</p>	<u> / 2 P</u>
----	--	----------------

Aufgabe 2: Untersuchung von Funktionen

(16 Punkte)

Von den fünf möglichen Antworten der Teilaufgabe ist nur eine richtig und ergibt zwei Punkte. Kreuzen Sie die einzig richtige Antwort an.

a)	<p>Sie sind dabei, das Polynom h zu untersuchen und haben soweit festgestellt, dass $h'(3) = 0$ und $h''(3) = 0$. Ohne weitere Angaben zu h wäre nur welche Aussage mit 100%-iger Sicherheit richtig?</p> <p><input type="checkbox"/> h hat bei $x = 3$ <u>keine</u> Extremstelle.</p> <p><input type="checkbox"/> h <u>hat</u> bei $x = 3$ eine Extremstelle.</p> <p><input type="checkbox"/> h <u>hat</u> bei $x = 3$ eine Wendestelle.</p> <p><input type="checkbox"/> h <u>hat</u> bei $x = 3$ einen Terrassenpunkt.</p> <p><input type="checkbox"/> h <u>hat</u> bei $x = 3$ eine waagrechte Tangente.</p>	<p><u> </u> / 2 P</p>
----	---	--------------------------

b) Gegeben ist die auf allen reellen Zahlen definierte Funktion

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$

b1) Berechnen Sie die Nullstellen von f .

 / 2 P

Aufgabe 2: Fortsetzung

- b2) Berechnen Sie alle Extrempunkte (also x - und y -Koordinate) von f und weisen Sie nach, dass es sich dabei um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

____ / 9 P

Aufgabe 2: Fortsetzung

- b3) Berechnen Sie alle Wendepunkte (also x - und y -Koordinate) von f und weisen Sie nach, dass es sich dabei um einen konkav-konvex oder konvex-konkav Wendepunkt handelt.

 / 3 P

Aufgabe 3: Funktionen mehrerer Variablen

(14 Punkte)

Geben Sie jeweils bei jeder der folgenden Antworten an, ob sie richtig (R) oder falsch (F) ist.

a)	<p>Für die Funktion E gilt: $E_x = -x$, $E_y = y - 1$</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> E hat ein Extremum bei $x = 1$ und $y = 1$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> E_{yy} existiert nicht.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> E hat einen Sattelpunkt.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $E_{xy} = 0$.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
----	---	--------------------------

b) Von einer Zwei-Produkte-Unternehmung sind die Erlös- und die Kostenfunktion bekannt:

$$E(x, y) = 8x + 16y - 0.5xy \quad \text{und} \quad K(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 40$$

Dabei bezeichnen x und y die monatlichen Absatzmengen der beiden Produkte X und Y . Aus betrieblichen Gründen können monatlich höchstens 12 ME des Produkts X und 14 ME des Produkts Y hergestellt und verkauft werden.

b1) Wenn in einem Monat exakt 8 ME des Produkts X abgesetzt werden, welche Absatzmenge y_{max} maximiert den monatlichen Erlös und wie hoch ist der maximale Erlös E_{max} ?

 / 3 P

Aufgabe 3: Fortsetzung

- b2) Finden Sie sowohl die gewinnmaximierenden Mengen x_{Gmax} und y_{Gmax} als auch den maximalen Gewinn G_{max} . Zeigen Sie dann, dass die stationäre Stelle tatsächlich ein Maximum ist.

 / 8 P

Aufgabe 4: Grundlagen der Integralrechnung

(12 Punkte)

- a) Berechnen Sie folgendes Integral von Hand. Der Rechenweg, insbesondere das Finden der Stammfunktion und deren Auswertungen, müssen nachvollziehbar sein.

 / 4 P

$$\int_0^1 \left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{3} + \sqrt{x} \right) dx$$

Von den fünf möglichen Antworten der Teilaufgabe ist nur eine richtig und ergibt zwei Punkte. Kreuzen Sie die einzig richtige Antwort an.

b)	<p>Sie kennen die Preisabsatzfunktion $p_N(x) = -0.2x + 20$ und die Angebotsfunktion $p_A(x) = 0.3x + 5$. Das Marktgleichgewicht wird im Punkt (30; 14) erreicht. Wie viel beträgt in diesem Fall die Konsumentenrente?</p> <p><input type="checkbox"/> 90</p> <p><input type="checkbox"/> 420</p> <p><input type="checkbox"/> 510</p> <p><input type="checkbox"/> 145</p> <p><input type="checkbox"/> 135</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
----	--	--------------------------

Aufgabe 4: Fortsetzung

- c) Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche zwischen $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ und $g(x) = x^3$.
Der Rechenweg, insbesondere das Finden der Stammfunktionen und deren Auswertungen, müssen nachvollziehbar sein.

 / 5 P

Aufgabe 5: Anwendung der Differentialrechnung**(12 Punkte)**

Gegeben ist die Stückkostenfunktion:

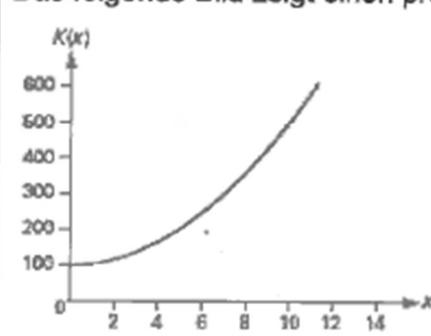
$$k(x) = 8x^2 - 15x + 20 + \frac{3000}{x}$$

Dabei bezeichnet die Variable k die Stückkosten und x die produzierte Menge.a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$. / 1Pb) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion $K'(x)$. / 1Pc) Bestimmen Sie das Betriebsoptimum x_0 . / 4P

Aufgabe 5: Fortsetzung

Geben Sie jeweils bei jeder der folgenden Antworten an, ob sie richtig (R) oder falsch (F) ist.

d)	<p>Ein Unternehmen, das eine Monopolstellung innehat, möchte sein Produkt für einen Preis zwischen 2.00 und 3.00 Franken verkaufen. Es hat festgestellt, dass der Absatz sich durch die lineare Preis-Absatzfunktion</p> $x(p) = 20 - 4p$ <p>beschreiben lässt. Welche Aussagen über die Preis-Elastizität $\epsilon_{x,p}$ der Nachfrage sind dann zutreffend?</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Preis-Elastizität der Nachfrage $\epsilon_{x,p}$ ist nie negativ.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Ohne Kenntnis der Kosten kann die Preis-Elastizität der Nachfrage $\epsilon_{x,p}$ nicht berechnet werden.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Wird der Preis auf 3.00 Franken festgesetzt, dann reagiert die Nachfrage elastisch, d.h. $\epsilon_{x,p} < -1$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Preis-Elastizität der Nachfrage $\epsilon_{x,p}$ ist für eine lineare Preis-Absatzfunktion konstant.</p>	<p>____ / 3 P</p>
----	---	-------------------

e)	<p>Das folgende Bild zeigt einen progressiven Kostenverlauf:</p>  <p>Dann gilt:</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Diese Kostenfunktion ist konkav gekrümmt.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Grenzkosten sind stets (ausser für $x = 0$) positiv.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Grenzkosten sind monoton fallend.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die variablen Stückkosten sind streng monoton wachsend.</p>	<p>____ / 3 P</p>
----	--	-------------------

Aufgabe 6: Anwendung der Differentialrechnung**(12 Punkte)**

a) Gegeben ist die allgemeine ertragsgesetzliche Kostenfunktion:

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bestimmen Sie die Parameter a , b , c und d , falls K Fixkosten in Höhe von 720 und ausserdem in $x = 40$ einen Wendepunkt mit Tangente $t(x) = 12x + 1360$ hat. Sie müssen die vollständige Kostenfunktion doppelt unterstrichen ausschreiben.

 / 9 P

Aufgabe 6: Fortsetzung

Geben Sie jeweils bei jeder der folgenden Antworten an, ob sie richtig (R) oder falsch (F) ist.

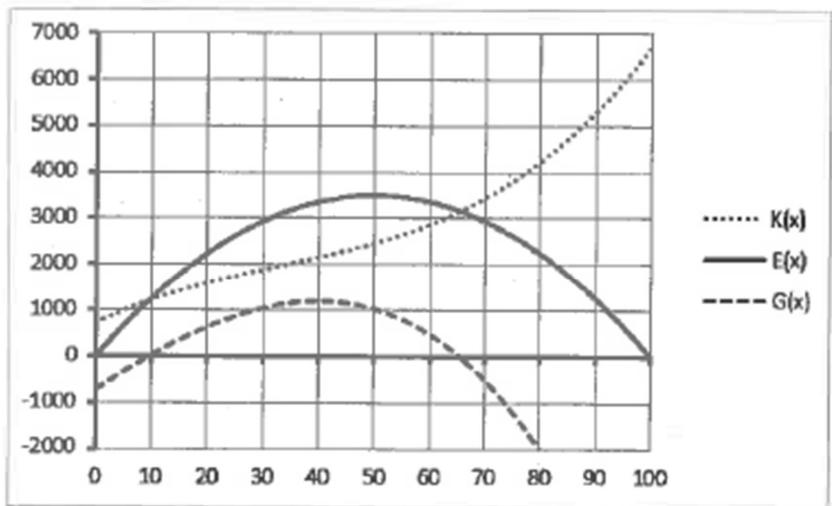
b)	Beantworten Sie bezugnehmend auf die unten grafisch verfügbaren Informationen: R F <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Im Gewinnmaximum wird mehr produziert als im Erlösmaximum. <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Der Wendepunkt der Kostenfunktion liegt bei $x_S = 25$. <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Das Betriebsminimum liegt bei $x_O = 60$. <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Der Grenzerlös ist nie null, die Grenzkosten können aber null werden.	_____ / 3 P
----	---	-------------

Gesamtkosten: $K(x)$

Erlös: $E(x)$

Gewinn: $G(x)$

(alle in GE)



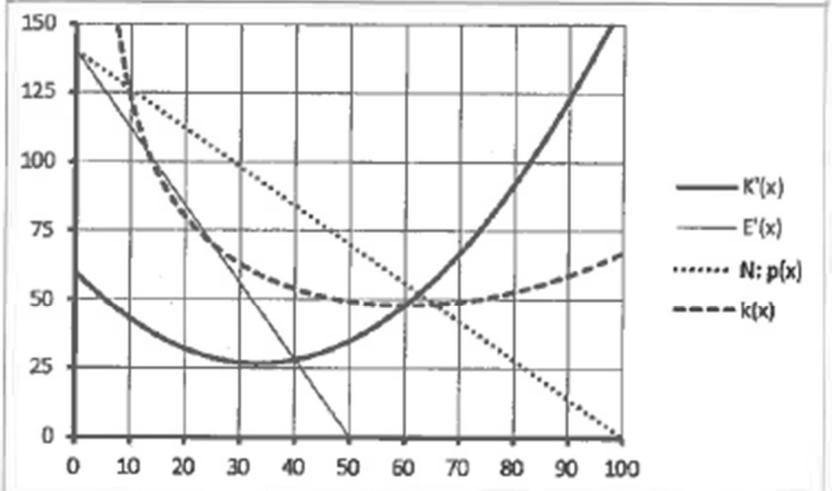
Grenzkosten: $K'(x)$

Grenzerlös: $E'(x)$

Preis-Absatz: $p(x)$

Stückkosten $k(x)$

(alle in GE/ME)



Aufgabe 7: Grundlagen der Integralrechnung

(12 Punkte)

Geben Sie jeweils bei jeder der folgenden Antworten an, ob sie richtig (R) oder falsch (F) ist.

a)	<p>Folgende Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung:</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f_t(x, t) + x^2 f_{xx}(x, t) + x f_x(x, t) = 0$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $x^2 f''(x) + x f'(x) = 0$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\frac{f'(x)}{f(x)} x = 0.5$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f'(x) + f(x) = -x$</p>	<p>____ / 3 P</p>
----	---	-------------------

b)	<p>Folgende Funktionen lösen die Differentialgleichung $f'(x) = -2f(x)$:</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $-x^2$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> e^{-2x}</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $2e^{-2(x-1)}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> e^{2x}</p>	<p>____ / 3 P</p>
----	--	-------------------

Aufgabe 7: Fortsetzung

- c) Der Zinssatz r und seine zeitliche Änderung r' in einer Volkswirtschaft lassen sich in Abhängigkeit von der Zeit t mit der Differentialgleichung

$$r'(t) = 0.01 - r(t)$$

beschreiben. Weiter gilt die Bedingung $r(0) = 0.02$.

- c1) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

 / 5 P

(Tipp: $\int \frac{1}{a-x} dx = -\ln(x-a) + C$, wobei a und C beliebige reelle Konstanten sind.)

- c2) Finden Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung.

(Wenn Sie c1 nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $r(t) = 0.05 + C \cdot 2^{-t}$)

 / 1 P

ENDE DER PRÜFUNG