Aufgabe 1: Mengen / Summen (11 Punkte)

(a) Gegeben ist die Menge $N = \{0\}$. Die leere Menge bezeichnen wir mit L. Genau eine der folgenden Aussagen ist falsch. Welche?

[1 Kreuz]

- ○ $N \cap L = L$
- ○ $N \cup L = \{0\}$
- ○ $N \setminus L = N$
- ○ $L \setminus N = N$
- ○ $L \subseteq N$

___ / 2 P.

(b) Geben Sie die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 < 9) \wedge (7 \geq 5x)\}$$

in aufzählender Form an.

___ / 3 P.

Aufgabe 1: Fortsetzung

(c) Für

i	1	2	3	4	5
x_i	7	−3	0	2	−6

ist der Wert der Summe

$$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$$

gleich

[1 Kreuz]

- ☐ 0
- ☐ 5
- ☐ 98
- ☐ 10
- ☐ 76

___ / 3 P.

Aufgabe 1: Fortsetzung

(d) Die Summe

$$\sum_{k=4}^{7}(ak^3+b)$$

kann zum Term

$$ax+by$$

vereinfacht werden. Bestimmen Sie die Zahlen x und y. ___ / 3 P.

Aufgabe 2: Folgen und Reihen (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Folgen $a_n, n \in \mathbb{N}$

(i) $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n^2+3n}{5n^2+6n}} = ?$

[1 Kreuz]

☐ ∞

☐ 0

☐ $\sqrt[5]{2}$

☐ 1

☐ $2^{\frac{1}{2}}$

___ / 3 P.

(ii) $\lim_{n\to 0} \frac{n^5+3n^3-4n+2}{6n^7+4n-3} = ?$

[1 Kreuz]

○ 0

○ 1

○ $\frac{1}{6}$

○ $-\frac{2}{3}$

○ ∞

___ / 2 P.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \ln(2)e^{\frac{n^3}{n^2+6n}} = ?$

[1 Kreuz]

☐ $\ln(2)e^{\frac{1}{6}}$

☐ $\ln(2)e$

☐ ∞

☐ 1

☐ 0

___ / 3 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(b) Das 1023. Folgenglied einer Folge $b_n, n \in \mathbb{N}$, sei 50 und das 1024. Folgenglied sei 25. Man bestimme das 1026. Folgenglied, falls

(i) b_n eine geometrische Folge ist ___ / 2 P.

(ii) b_n eine arithmetische Folge ist ___ / 2 P.

Aufgabe 3: Einführung in die Finanzmathematik (14 Punkte)

(a) Ein Zahlungsstrom bestehe aus vier Zahlungen: Heute in einem Jahr CHF 100, heute in zwei Jahren CHF 200, heute in drei Jahren CHF 300 und heute in fünf Jahren CHF 400. Der Zinssatz betrage 10%. Berechnen Sie den Barwert dieses Zahlungsstroms. ___ / 3 P.

(b) Ein Zahlungsstrom habe einen Barwert CHF 500. Der Zinssatz betrage 7%. Berechnen Sie den Zeitwert dieses Zahlungsstroms zu angegebenen Zeitpunkten:

(i) in fünf Jahren: ___ / 2 P.

(ii) vor einem Jahr: ___ / 2 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(c) Eine 15-jährige, vorschüssige Rente mit einer Rate r von CHF 1000, werde zu 6% verzinst.

(i) Bestimmen Sie den Barwert dieser Rente. ___ / 2 P.

(ii) Um welchen Faktor wächst der Barwert dieser Rente, wenn die Rate r verdoppelt wird? ___ / 2 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(d) Ein Investitionsprojekt bestehe aus folgenden Zahlungen: Heute CHF -1700, heute in einem Jahren CHF 500, heute in zwei Jahren CHF 600 und heute in vier CHF 1000. Der Zinssatz betrage 9%.

Von den folgenden Aussagen über dieses Investitionsprojekt ist eine nicht zutreffend. Kreuzen Sie diese an.

[1 Kreuz]

- ☐ NPV $=$ CHF -27.85
- ☐ IRR $< 9\%$
- ☐ IRR $> 9\%$
- ☐ Wenn heute anstatt CHF 1700 neu CHF 2000 fällig werden, wird der NPV kleiner.
- ☐ Das Investitionsprojekt lohnt sich nicht.

___ / 3 P.

Aufgabe 4: Funktionen und ihre Eigenschaften (12 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{falls } |x| < 2 \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu bezüglich der Beschränktheit der Funktion $f(x)$?

[1 Kreuz]

- ○ $f(x)$ ist nach oben beschränkt, jedoch nicht nach unten
- ○ $f(x)$ ist nach unten beschränkt, jedoch nicht nach oben
- ○ Es lässt sich keine Aussage bezüglich der Beschränktheit von $f(x)$ treffen
- ○ $f(x)$ ist beschränkt
- ○ $f(x)$ ist nicht beschränkt

___ / 2 P.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[4]{2-x} - 1$

(i) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x)$ den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{B}$. ___ / 2 P.

(ii) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ ___ / 2 P.

Aufgabe 4: Fortsetzung

(c) Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{4}{x}$ und $g(x) = x + 1$. Bestimmen Sie die Verkettung $k(x) = (f \circ (g \circ f))(x)$ für $x \in (0, \infty)$.
___ / 3 P.

(d) Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{falls } x \geq 3 \\ -\frac{1}{x} + a & \text{falls } 0 < x < 3 \end{cases}$$

Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion stetig ist auf dem Intervall $(0, \infty)$?
___ / 3 P.

Aufgabe 5: Elementare Funktionen (14 Punkte)

(a) Welchen Punkt (x, y) haben die Graphen der Funktionen $\log_2(x)$, $\ln(x)$ und $\log_{0.5}(x)$ gemeinsam?

[1 Kreuz]

- ○ $(0, 1)$
- ○ $(1, 0)$
- ○ Keinen
- ○ Mehr als einen gemeinsamen Punkt
- ○ $(0, 0)$

___ / 2 P.

(b) Die exponentiell wachsende Funktion $f(x) = c \cdot q^x$ habe den Wachstumsfaktor $q = 4$ und der Graph der Funktion gehe durch den Punkt $(0, 3)$. Wie sieht die zugehörige Exponentialform der Funktion aus?
Hinweis: Bestimmen Sie $f(x)$ in der Form $f(x) = c \cdot e^{ax}$ mit Parametern a und c. ___ / 3 P.

(c) Eine kubische Funktion $f(x)$, d.h. ein Polynom 3. Grades, habe die Nullstellen

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2$$

und der Graph gehe durch den Punkt $(-1, 6)$. Wie sieht die zugehörige Funktion $f(x)$ aus?
Hinweis: Sie können die Funktion $f(x)$ in Standard-Form oder in faktorisierter Form angeben.
___ / 3 P.

Aufgabe 5: Fortsetzung

(d) Die quadratische Funktion sei gegeben als $f(x) = a(x-3)^2 + 5$.
Bitte geben Sie an:

(i) Die Koordinaten des Scheitelpunktes. ___ / 1 P.

(ii) Den Wert a, für welchen die Funktion $f(x)$ durch die Punkte $(2,2)$ und $(4,2)$ geht. ___ / 1 P.

(e) Die Graphen der linearen Funktionen $f(x) = ax + 5$ und $g(x) = bx + 3$ haben den Schnittpunkt $(-1,4)$. Bestimmen Sie die beiden Geradengleichungen von $f(x)$ und $g(x)$. ___ / 4 P.

Aufgabe 6: Ausgewählte ökonomische Anwendungen (15 Punkte)

(a) Für den Bezug von elektrischer Energie bietet das Stadtwerk einer Stadt im Kanton Zürich unter anderem die folgenden beiden Stromtarife an:

Tarif A:	Grundpreis: 9.80 CHF pro Monat
	und für den Stromverbrauch pro Monat 22 Rappen pro kWH
Tarif B:	Grundpreis: 6.60 CHF pro Monat
	und für den Stromverbrauch pro Monat 26 Rappen pro kWH

Die Abkürzung "kWh" steht für Kilowattstunde und gibt die Einheit an, mit welcher der variable Stromverbrauch gemessen wird.

(i) Geben Sie für die beiden Tarife A und B jeweils die Gleichung der Kostenfunktion an, d.h. $K_A(x)$ und $K_B(x)$, welche die monatlichen Gesamtkosten in CHF in Abhängigkeit des monatlichen Energieverbrauchs x in kWh angibt. ___ / 2 P.

(ii) Bei welchem monatlichen Energieverbrauch in kWh ergeben sich in beiden Tarifen dieselben Gesamtkosten?
Geben Sie die dafür zu lösende Gleichung an und lösen Sie diese anschliessend. ___ / 3 P.

Aufgabe 6: Fortsetzung

(b) Ein Unternehmen der Baumaschinenindustrie führt ein neues Modell eines Drehkrans ein. Aufgrund von Marktinformationen geht das Unternehmen davon aus, dass sich der zeitliche Verlauf des Absatzes A durch eine Funktion $A = A(t)$ modellieren lässt, deren Funktionsausdruck gegeben ist durch:

$$A(t) = 15 + \frac{260}{1 + 12 \cdot e^{-0.1783\,t}} \qquad (t \geq 0)$$

Dabei gibt $A(t)$ den Absatz in Stück bis zum Monat t an, wobei $t = 0$ dem Zeitpunkt der Markteinführung entspricht.

(i) Geben Sie den Anfangsabsatz $A(0)$ bei Markteinführung und den Sättigungswert an, d.h. den Grenzwert von $A(t)$ für $t \to \infty$. ___ / 3 P.

(ii) Nach wievielen Monaten wird ein Absatz von 200 Stück erreicht?
Geben Sie die dafür zu lösende Gleichung an und runden Sie ihre Lösung auf zwei Nachkommastellen. ___ / 4 P.

Aufgabe 6: Fortsetzung

(c) Der Gewinn eines Unternehmens in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge kann durch eine quadratische Gewinnfunktion beschrieben werden. Die Gewinnzone liegt zwischen 115 und 155 abgesetzten Einheiten. Der maximal mögliche Gewinn beträgt 600 Geldeinheiten im Jahr. Geben Sie den Gewinn G als Funktion der abgesetzten Menge x an. ___ / 3 P.

Aufgabe 7: Grundlagen der Differentialrechnung (12 Punkte)

(a) Für $u \neq 0$ betrachten wir die Funktion

$$f(u) = 3u^{-3} + 2u^{-2} + \frac{1}{u} + 1$$

Bestimmen Sie die Ableitung $f'(u)$.

[1 Kreuz]

- ○ $f'(u) = -9u^{-2} + 4u^{-1} - u$
- ○ $f'(u) = 9u^{-2} - 4u^{-1} + u$
- ○ $f'(u) = -9u^{-4} - 4u^{-3} - \frac{1}{u^2}$
- ○ Die vierte Ableitung von f ist gleich 0
- ○ $f'(1) = -13$

___ / 2 P.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f(x) = 7x^2$$

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ von f lautet:

[1 Kreuz]

- ○ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 7\Delta x + 14$
- ○ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 14\Delta x + 7$
- ○ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 14\Delta x + 7x$
- ○ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 14x\Delta x + 7\Delta x$
- ○ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 14x + 7\Delta x$

___ / 2 P.

Aufgabe 7: Fortsetzung

(c) Für $x \neq 0$ betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Die Funktion der Tangente an der Stelle $x = 1$ lautet:

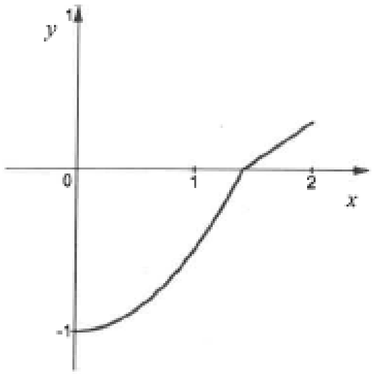
[1 Kreuz]

- ○ $T(x) = -(x-1)$
- ○ $T(x) = x - 1$
- ○ $T(x) = -(x-1) + 1$
- ○ $T(x) = -x^{-2} + 1$
- ○ $T(x) = -1$

___ / 2 P.

(d) Unten sehen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\right), & 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{2}\right), & \sqrt{2} < x \leq 2 \end{cases}$$



i) Markieren Sie in der Zeichnung **klar erkenntlich** den eindeutigen Ort, wo f nicht differenzierbar ist.

___ / 1 P.

ii) Berechnen Sie die drei Grössen

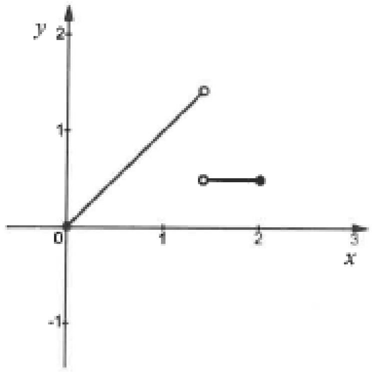
$f'(3/2) =$ $\qquad$ $f'(0) =$ $\qquad$ $f''(3/2) =$

Hinweis: Sie dürfen die Antwort ohne Rechnung eintragen

___ / 3 P.

Aufgabe 7: Fortsetzung

iii) Unten sehen Sie den Graph der Ableitung von f:



Wie lautet der links und rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f'(x) = \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}^+} f'(x) =$$

Hinweis: Sie dürfen die Antwort ohne Rechnung eintragen ___ / 2 P.

ENDE DER PRÜFUNG