

Aufgabe 1: Mengen / Summen

(9 Punkte)

<p>a)</p>	<p>Gegeben sind die beiden Mengen:</p> $M_1 = \{3n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 3 < n \leq 8\}$ $M_2 = \{4n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 8\}$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Menge M_1 enthält 5 Elemente und die Menge M_2 enthält 6 Elemente.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $M_1 \cap M_2 = \{12, 24\}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\{18, 21\} \subseteq M_1$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $32 \in M_2$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
<p>b)</p>	<p>A ist eine beliebige, nicht leere Menge.</p> <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cup A = A$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cap A = A$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \subseteq A$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \setminus A = A$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>

Aufgabe 1: Fortsetzung

c)	Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.	/ 3 P
	R F	
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sum_{k=2}^{25} 3 = 75$	
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für jede beliebige Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{n=1}^4 (x+n)^2 = \sum_{n=1}^4 (x^2 + n^2)$	
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sum_{k=1}^9 \left(\frac{3}{8} \cdot \sqrt{k+2} \right) = \frac{3}{8} \cdot \sum_{k=1}^9 \sqrt{k+2}$	
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sum_{k=2}^{11} \left(\frac{2}{k+1} \right) = \frac{2}{\sum_{k=2}^{11} (k+1)}$	

Aufgabe 2: Folgen und Reihen

(12 Punkte)

a) Betrachten Sie die Folge (a_n) , welche wie folgt rekursiv definiert ist:

$$a_{n+1} = a_n + 3n \text{ mit } a_1 = 17$$

a1) Geben Sie die ersten fünf Folgenglieder an.

 / 1 P

n	1	2	3	4	5
a_n					

a2) Beschreiben Sie die Folge (a_n) explizit. / 4 Pa3) Berechnen Sie a_{12} / 1 P

Aufgabe 2: Fortsetzung

- b) Wie viele Glieder der geometrischen Folge (20, 21, ...) muss man mindestens addieren, damit die Summe grösser als 1 Million wird?

14 P

- c) Berechnen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 17n^{-2}}{6n^2 - 18n^4} = ?$$

12 P

Aufgabe 3: Finanzmathematik**(12 Punkte)**

- a) Ein Ehepaar möchte ab dem 01.01.2020 beginnend jeweils jährlich CHF 8'000 auf ein Vorsorgekonto einzahlen. Der Zinssatz betrage stets 0.1% p.a. _____ / 4 P
Wie hoch ist das angesparte Kapital K am 31.12.2030, falls die erste Einzahlung am 01.01.2020 und die letzte Einzahlung am 01.01.2030 getätigt wird?

- b) Wie hoch ist der Barwert von dem ersparten Kapital aus Teilaufgabe (a) zum Bewertungszeitpunkt 01.01.2020? Der Zinssatz betrage stets 0.1% p.a. _____ / 2 P
(Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe (a) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $K = 100'000$)

Aufgabe 3: Fortsetzung

c)	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p style="text-align: right;"><u> </u> / 3 P</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für die Laufzeit von einem Jahr ($n = 1$) liefert die einfache Verzinsung bei jährlicher Zinszahlung denselben Zinsbetrag wie die Verzinsung mit Zinseszins.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Das Kapital für die Laufzeit von $n = 7$ Jahren beträgt bei einfacher Verzinsung:</p> $K_7 = K_0 + 7 \cdot i \cdot K_6$ <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Das Kapital für die Laufzeit von $n = 7$ Jahren beträgt bei Verzinsung mit Zinseszins:</p> $K_7 = K_0 + (1 + i)^7$ <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Das Kapital für die Laufzeit von $n = 7$ Jahren beträgt bei Verzinsung mit Zinseszins:</p> $K_7 = K_6 + i \cdot K_6$
----	---

d) Angenommen Sie zahlen erstmals am 01.01.2020, dann weiter am 01.01.2021, am 01.01.2022 und letztmals am 01.01.2023 je CHF 2'000 auf ein Sparkonto ein. Wie hoch ist der Zinssatz, falls der Barwert dieser vier Zahlungen per 01.01.2020 CHF 7'900 beträgt? / 3 P

Aufgabe 4: Funktionen und ihre Eigenschaften

(12 Punkte)

a)	<p>Betrachten Sie die Funktion:</p> $h(x) = (x + 1)^2 \text{ mit } \mathbb{D}_h = \mathbb{R}_0^+$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> h hat genau eine Nullstelle.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> h ist umkehrbar.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> h ist konvex.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für alle $x \in \mathbb{D}_h$ gilt: $h(\sqrt{x} - 1) = x$</p>	<p><u> / 3 P</u></p>
b)	<p>Betrachten Sie die Funktion:</p> $f(x) = a \cdot x + b$ <p>Hierbei sind a und b reelle Parameter und weiter gilt $a \neq 0$ sowie $b \neq 0$.</p> <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f^{-1}(x) = \frac{x+b}{a}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es sei $g(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Dann ist $(g \circ f)(x) = c$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für $a > 0$ gilt: f ist streng monoton wachsend</p>	<p><u> / 3 P</u></p>

Aufgabe 4: Fortsetzung

c) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x(x^2 - 25)}$$

c1) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f .12 Pc2) Bestimmen Sie die Nullstellen von f .12 Pc3) Berechnen Sie $f(x) + f(-x)$.12 P

Aufgabe 5: Elementare Funktionen

(9 Punkte)

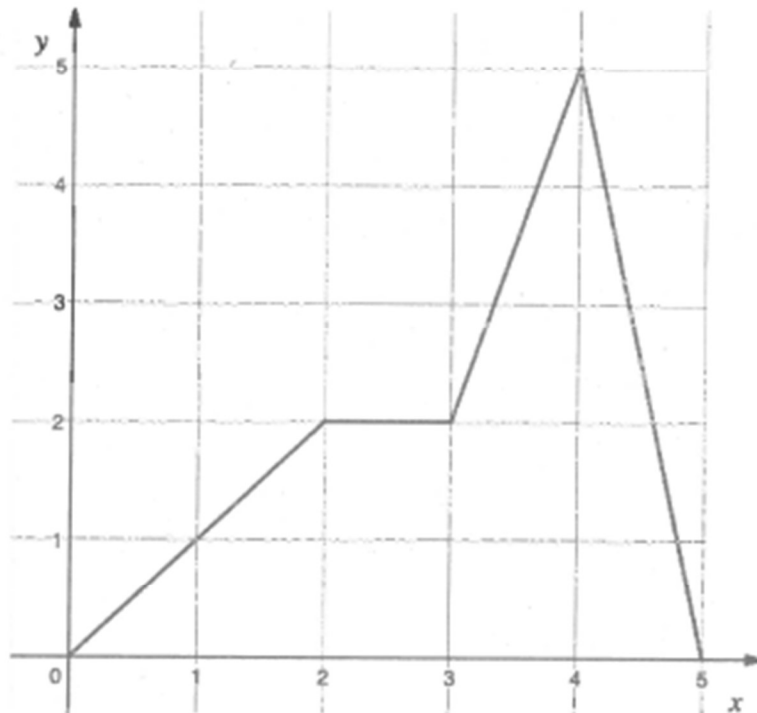
<p>a)</p>	<p>Betrachten Sie folgende Funktion:</p> $f(x) = \log_a x \text{ mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+ \text{ und } a > 0 \text{ und } a \neq 1$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $y = \log_a x$ ist die Lösung der Gleichung $a^y = x$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(27) = 3$, falls $a = 3$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es gibt kein x, so dass $f(x) = 0$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(a) = 1$</p>	<p><u> / 3 P </u></p>
<p>b)</p>	<p>Betrachten Sie folgende Funktion:</p> $f(x) = \sqrt{x} \text{ mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(f(256)) = 4$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $y = f(x)$ ist die positive Lösung der Gleichung $y^2 = x$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> f ist umkehrbar.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für alle $x \geq 0$ gilt: $f(x^2) = x$.</p>	<p><u> / 3 P </u></p>

Aufgabe 5: Fortsetzung

c)

Betrachten Sie den Graphen der Funktion f mit $\mathbb{D}_f = [0; 5]$ in der nachstehenden Skizze:

 / 3 P



Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

R F

$f(x) = x$ für $x \in [0; 2]$

$f(2.3) = f(2.6)$

f ist auf \mathbb{D}_f umkehrbar.

f besitzt für $x \in [0; 2]$ die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

Aufgabe 6: Ausgewählte ökonomische Anwendungen (15 Punkte)

Ein Produzent erzielt mit der Herstellung und dem Absatz von x Mengeneinheiten eines bestimmten Produkts einen Gesamtgewinn von

$$G(x) = -x^2 + 400x - 25'600$$

(in Geldeinheiten).

- a) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge sowie das Gewinnmaximum. / 3 P

- b) Die Erlösfunktion des Produzenten ist gegeben durch:

$$E(x) = -x^2 + 500x$$

(in Geldeinheiten). Bestimmen Sie die Kostenfunktion des Produzenten. / 3 P

Aufgabe 6: Fortsetzung

c) Für welche Mengen erzielt der Produzent einen Gewinn?

12 P

d) Der Produzent verkauft derzeit zu einem Preis von $340 \frac{GE}{ME}$. Um wieviel soll er den Preis erhöhen oder senken, um seinen Gewinn zu maximieren?

14 P

e) Für welche Mengen erzielt der Produzent einen positiven Deckungsbeitrag?

13 P

Aufgabe 7: Grundlagen der Differentialrechnung

(12 Punkte)

<p>a)</p>	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Der Differenzenquotient einer beliebigen Funktion f ist:</p> $\frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{-\Delta x}$ <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für die Funktion $f(x) = ax + b$ sind Differenzenquotient und Differentialquotient gleich a.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f'(3) = -2$ bedeutet, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3; f(3))$ die Steigung -2 hat.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für die Funktion $f(x) = 2x^2 + 2$ ist die Steigung der Sekante auf dem Intervall $[1; 3]$ gleich 8.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
<p>b)</p>	<p>Gegeben sei $g'(x) = 3x^2 - 2x - 9$. Weiter habe die Tangente an den Graphen von g an der Stelle $x = 2$ die Gleichung $t(x) = -x + 5$.</p> <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es ist $g(2) = -1$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es ist $g(x) = x^3 - x^2 - 9x + 17$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es ist $g'(2) = t'(2)$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es ist $g(x) = x^3 - x^2 - 9x$.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>

Aufgabe 7: Fortsetzung

c)	<p>Betrachten Sie die Funktion:</p> $h(t) = a^3 \cdot x^2 \cdot t^{-1}$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die erste Ableitung von h ist: $h'(t) = 2 \cdot a^3 \cdot x \cdot t^{-1}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die erste Ableitung von $2h$ ist: $(2 \cdot h)'(t) = -2 \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot t^{-2}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die zweite Ableitung von h ist: $h''(t) = 2 \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot t^{-3}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die zweite Ableitung von h' ist: $h'''(t) = \frac{6 \cdot a^3 \cdot x^2}{-t^4}$</p>	<p><u> / 3 P </u></p>
----	--	-------------------------

d) Betrachten Sie die abschnittsweise definierte Funktion: / 3 P

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ 2x - 2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 8: Eingangskompetenzen

(9 Punkte)

<p>a)</p>	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $1 \cdot 10^{-5} = 0.00005$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $3.15 \cdot 10^{-2} = 0.007$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $pq^2 \cdot (-p^2q) - 3p^3q^3 = -5p^3q^3$ für alle $p, q \in \mathbb{R}^+$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a^2+a}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
<p>b)</p>	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $4^{0.75} \cdot 10^{0.75} = 40^{0.75}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{-10}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\frac{a^{0.5} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt{a} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{b}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(\sqrt[4]{y^3} : \sqrt[3]{y^2}) : y = y^{-\frac{11}{12}}$ für alle $y \in \mathbb{R}^+$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>

Aufgabe 8: Fortsetzung

c)	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\log_{10} 5 + \log_{10} 8 - \log_{10} 10 = \log_{10} 3$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\log_{10} a^3 + \log_{10} a = 4 + \log_{10} a$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\log_2 a^{-2} = -2 \cdot \frac{\log_{10} a}{\log_{10} 2}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $3 \log_{10} a + 2 \log_{10} b - \log_{10} c = \log_{10} \frac{a^3 b^2}{c}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
----	--	--------------------------

ENDE DER PRÜFUNG