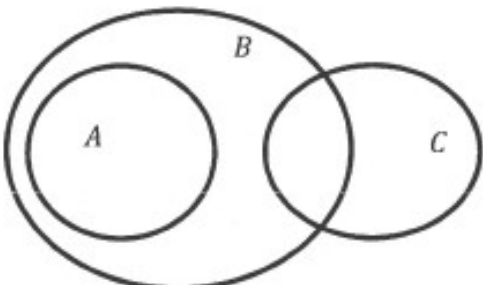


Aufgabe 1: Mengen / Summen

(9 Punkte)

<p>a)</p>	<p>Gegeben sind folgende Mengen:</p> $A = \{-3, -1, 1, 3\}$ $B =]-\infty; -1[$ $C = \{k^3 \mid k \in \mathbb{R}\}$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cup B \cup C =]-\infty; \infty[$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cap B = \{-3, -1, 1, 3\}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cap C = \{-1, 1\}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $B \setminus A =]-\infty; -3[\cup]-3; -1[$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
<p>b)</p>	<p>Die Flächen in folgendem Mengendiagramm repräsentieren drei Mengen A, B, C. Keine der Mengen ist leer, und A ist eine Teilmenge von B.</p>  <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cup C = B \setminus A$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \subseteq B$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cup C = B$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $A \cap B = B$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>

Aufgabe 1: Fortsetzung

c)	Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. R F <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sum_{k=2}^6 k = 24$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $x = 16$ ist eine Lösung der Gleichung: $\sum_{k=3}^7 (2^k + 10) = x^2 + 42$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sum_{k=1}^3 (a_{k+1} b_k^2) = a_2 b_1^2 + a_3 b_2^2 + a_4 b_3^2$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sum_{k=0}^{10} (k+1) - \sum_{k=1}^{10} (k+1) = 0$	/ 3 P
----	--	-------

Aufgabe 2: Folgen und Reihen

(10 Punkte)

a)	<p>Betrachten Sie die Folge:</p> $K_n = K_{n-1} + \frac{1}{100} K_{n-1} \text{ mit } K_0 = 100$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $K_2 = 102.00$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 0$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Folge K_n ist eine geometrische Folge.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $K_n = 100 \cdot 1.01^n$</p>	/ 3 P
b)	<p>Betrachten Sie die Folge:</p> $K_n = K_{n-1} + \frac{1}{100} K_0 \text{ mit } K_0 = 100$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $K_2 = 102.00$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $K_n = 100 + n$ ist eine explizite Definition der Folge.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Folge K_n ist eine arithmetische Folge.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 0$</p>	/ 3 P

Aufgabe 2: Fortsetzung

c) Berechnen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} + n}{\sqrt{2} \cdot n - 2} = ?$$

12 P

d) Berechnen Sie die unendliche Summe

$$s_n = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots$$

12 P

Aufgabe 3: Finanzmathematik**(15 Punkte)**

Der ursprüngliche Vorsorgeplan von Frau Sicher sah vor, während 30 Jahren jeweils am Jahresende CHF 5'000 auf ihr Vorsorgekonto einzuzahlen. Die Bank versprach einen Zinssatz von 2% p.a.

Unmittelbar nach der 15. Einzahlung senkt die Bank den Zinssatz jedoch auf 1% p.a. Durch diese Zinssatzreduktion wird Frau Sicher am Ende einen kleineren Betrag zur Verfügung haben als ursprünglich angenommen. Bestimmen Sie den entsprechenden Fehlbetrag am Ende des 30. Jahres, indem Sie wie folgt vorgehen:

(Hinweis: Falls Sie eine Teilaufgabe nicht lösen konnten, dürfen Sie Annahmen treffen, um weiter rechnen zu können. Annahmen bewirken jedoch Abzüge.)

a) Bestimmen Sie den Kontostand unmittelbar nach der 30. Einzahlung, wenn der / 4 P
Zinssatz für alle Jahre 2% p.a. geblieben wäre.

b) Bestimmen Sie den Kontostand unmittelbar nach der 15. Einzahlung. Der / 2 P
Zinssatz war 2% p.a.

Aufgabe 3: Fortsetzung

- c) Bestimmen Sie den Kontostand unmittelbar nach der 30. Einzahlung unter Berücksichtigung der Zinssatzreduktion nach der 15. Einzahlung auf 1% p.a. / 4 P
- d) Bestimmen Sie den Fehlbetrag unmittelbar nach der 30. Einzahlung. / 2 P
- e) Welchen Betrag müsste Frau Sicher zusätzlich zur 15. Einzahlung einmalig einzahlen, damit der Fehlbetrag kompensiert werden würde? / 3 P

Aufgabe 4: Funktionen und ihre Eigenschaften

(9 Punkte)

a)	<p>Gegeben ist die Funktion:</p> $g(x) = x^3 - 3x + 1$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $g(x)$ ist streng monoton wachsend.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $g(x)$ ist umkehrbar</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) = g(-x)$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$</p>	<p><u> / 3 P</u></p>
b)	<p>Gegeben ist die Funktion:</p> $f(x) = \frac{(x+1)^2}{a(x^2+x-6)}$ <p>Hierbei ist a ein reeller Parameter ungleich 0.</p> <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(x)$ hat genau zwei Nullstellen: $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ hängt nicht von a ab</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(1) = -\frac{1}{2a}$</p>	<p><u> / 3 P</u></p>

Aufgabe 4: Fortsetzung

c)	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^-$ ist umkehrbar.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Zwei quadratische Polynome können 0, 1 oder 2 gemeinsame Schnittstellen haben.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Funktion $f(x) = x + 2$ hat keine Unstetigkeitsstelle.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Lineare Funktionen (mit Steigung $m \neq 0$) haben immer einen Schnittpunkt mit einer beliebigen konstanten Funktion.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
----	---	--------------------------

Aufgabe 5: Elementare Funktionen

(10 Punkte)

a)	<p>Betrachten Sie folgende Funktion:</p> $f(x) = x^2 + 1 \quad \text{mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> f hat genau eine Nullstelle, nämlich in $x_1 = -1$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(f(x)) = (x^2 + 1)^2 + 1$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> f ist im ganzen Definitionsbereich umkehrbar.</p>	<u> / 3 P</u>
b)	<p>Betrachten Sie folgende Funktion:</p> $f(x) = 2^x - 3 \quad \text{mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> f ist ein Polynom.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Nullstelle von f ist bei $x = \log_2 3$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Gleichung $2 \cdot f(2) = f(x)$ hat genau eine Lösung</p>	<u> / 3 P</u>

Aufgabe 5: Fortsetzung

- c) Eine Autovermietungsfirma (A) bietet Autos für eine Pauschale von CHF 40 pro Tag an. Pro gefahrenem Kilometer bezahlt der Kunde zusätzlich CHF 0.15. / 4 P

Eine Konkurrenzfirma (B) bietet Autos für eine Pauschale von CHF 50 pro Tag an. Pro gefahrenem Kilometer bezahlt der Kunde zusätzlich CHF 0.10.

- c1) Geben Sie für beide Mitbewerber Kostenfunktionen $K_A(x)$ und $K_B(x)$ für die Mietkosten pro Tag in Abhängigkeit der gefahrenen Kilometer x an. / 2 P

- c2) Sie planen an einem (1) Tag 200 Kilometer zu fahren. Welcher Anbieter ist günstiger und wie gross sind die Kosten? / 2 P

Aufgabe 6: Ausgewählte ökonomische Anwendungen (16 Punkte)

a) Ein Unternehmen stelle nur ein Produkt her und produziere unter folgenden Annahmen: / 4 P

- Die Fixkosten betragen 3'600 GE.
- Jedes Stück verursacht 4 GE zusätzliche Kosten.
- Jedes Stück kann zu 10 GE verkauft werden.

a1) Bei welcher Produktions- resp. Absatzmenge deckt der Erlös die Fixkosten? / 2 P

a2) Welches ist die Break-Even-Menge? / 2 P

Aufgabe 6: Fortsetzung

- b) Eine Firma ist einzige Anbieterin (Monopolistin) und stehe vielen Nachfragern gegenüber. Dann kann sie den Preis ihres Absatzes bestimmen. Nehmen wir an, die Nachfragefunktion ist linear und monoton fallend: / 6 P

$$x(p) = 128 - 8p$$

Die Firma verkauft derzeit zu einem Preis von 10 GE/ME. Es stellt sich nun die Frage, ob die Monopolistin den Preis erhöhen oder senken soll.

- b1) Wie hoch ist der aktuelle Erlös? / 2 P

- b2) Welcher Preis maximiert den Erlös und wie hoch fällt der maximale Erlös aus? / 4 P

Aufgabe 6: Fortsetzung

- c) Die Entwicklung der Verkaufszahlen nach einem Produkte-Update soll durch eine logistische Funktion beschrieben werden. / 6 P

Marketing Research meint, dass der Sättigungswert ungefähr 10'000 Stück pro Tag betragen wird. Aktuell liegt der Absatz (=Startwert) bei 4'000 Stück pro Tag.

- c1) Wie lautet die logistische Funktion (Ohne konkrete Bestimmung des für die Dynamik des Anstiegs verantwortlichen Parameters c)? / 3 P

- c2) Welchen Wert muss der Parameter c annehmen, damit eine Verdoppelung der aktuellen Verkaufszahlen in 20 Tagen stattfindet? / 3 P

Aufgabe 7: Grundlagen der Differentialrechnung

(9 Punkte)

<p>a)</p>	<p>Gegeben ist die Funktion</p> $f(x) = 3x^2 + 1$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Steigung von f nimmt an keiner Stelle x den Wert -1 an.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> f ist sowohl stetig als auch differenzierbar.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Steigung der Sekante im Intervall $[-5; 5]$ hat den Wert 0.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Tangente von f bei $x = 1$ hat die Steigung 6.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
<p>b)</p>	<p>Von einer Funktion $g(x)$ ist bekannt, dass ihre Tangente an der Stelle $x = 4$ die Gleichung $t(x) = 5x + 2$ hat.</p> <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es ist $g'(4) = 5$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Es ist $g(4) = 22$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> g muss die y – Achse bei $y = 2$ schneiden.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> g muss wie ihre Tangente t bei $x = -\frac{2}{5}$ eine Nullstelle haben.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>

Aufgabe 7: Fortsetzung

c)	<p>Gegeben ist die Funktion:</p> $h(x) = \sqrt[3]{x^2} + x$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die erste Ableitung von h ist: $h'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die erste Ableitung von $3h$ ist: $h'(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} + 3$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die zweite Ableitung von h ist: $h''(x) = \frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{4}{3}}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die erste Ableitung von h' ist: $h''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{4}{3}}$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
----	--	--------------------------

Aufgabe 8: Eingangskompetenzen

(12 Punkte)

a)	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(-1) b - a \leq 0$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sqrt{-5} \in \mathbb{R}$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $[a; b] \cap \left[\frac{a}{2}; 2b\right] = [a; b]$, für alle $0 \leq a < b$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $-\frac{22}{25} < -0.87$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
b)	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Funktion $f(x) = (x + 2)^2 + 1$ hat keine Nullstelle.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Funktionen $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$ sind gleich.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Die Gleichungen $2x^2 + 4x - 2 = 0$ und $x^2 + 2x - 1 = 0$ haben die gleiche Lösungsmenge.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Das Gleichungssystem</p> $\begin{aligned} 2x + 5y &= -3 \\ -3x + 2y &= -5 \end{aligned}$ <p>hat die Lösung $(1, -1)$.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>

Aufgabe 8: Fortsetzung

<p>c)</p>	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\frac{a^2xy-ax^2y}{5a^2-5ax} = \frac{xy}{5}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $4^{0.75} \cdot 10^{0.75} = 40^{1.5}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{5}$</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(\sqrt[4]{y^3} : \sqrt[3]{y^2}) : y = y^{29/12}$</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>
<p>d)</p>	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Der Definitionsbereich der Funktion \log ist $[0; \infty[$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $3 \log_{10}(a) + 2 \log_{10}(b) - \log_{10}(c) = \log_{10}\left(\frac{a^3b^2}{c}\right)$, für alle $a, b, c > 0$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\log_a(b^{-2}) = (-2) \cdot \frac{\log_{10}(b)}{\log_{10}(a)}$, für alle $a, b > 0, a \neq 1$.</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\log_{10}(a) - \log_{10}(b) = a - b$, für alle $a, b > 0$.</p>	<p><u> </u> / 3 P</p>

ENDE DER PRÜFUNG