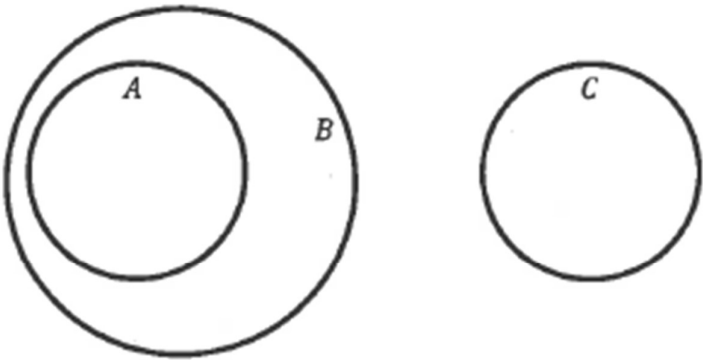


## Aufgabe 1: Mengen / Summen

(12 Punkte)

a)	<p>Gegeben sind folgende Mengen:</p> $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $B = ]-2; \infty[$ $C = \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R    F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>A \cup B = ]-2; \infty[</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>A \cap B = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 &lt; m &lt; 3\}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>A \cap C = \{1, 2\}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>A \setminus C = \{-2, -1\}</math></p>	<p style="text-align: right;"><u>  / 3 P</u></p>
b)	<p>Die Kreisflächen in folgendem Mengendiagramm repräsentieren drei Mengen <math>A, B, C</math>. Keine der Mengen ist leer, und <math>A</math> ist eine Teilmenge von <math>B</math>.</p>  <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R    F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>A \cap C = \emptyset</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>A \subseteq (B \setminus C)</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>(A \cup C) \subseteq (B \cup C)</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>(A \cap C) = (B \cap C)</math></p>	<p style="text-align: right;"><u>  / 3 P</u></p>

## Aufgabe 1: Fortsetzung

c)	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R    F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>x = 5</math> ist eine Lösung der Gleichung: <math>\sum_{k=0}^5 x = 30</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>x = 1</math> ist eine Lösung der Gleichung:</p> $\sum_{k=20}^{22} (x^{k-20} + 10) = 29 + 3x + x^2$ <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>\sum_{k=1}^4 (3^k - 3^{k+1}) = 3 - 3^5</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>\sum_{k=0}^{100} k - \sum_{k=1}^{100} k = 0</math></p>	<p><u>  / 3 P  </u></p>
d)	<p>Geben Sie für jeden der folgenden vier Ausdrücke an, ob er die folgende Summe der <u>geraden</u> Quadratzahlen <math>144 + 196 + 256 + \dots + 2304 + 2500</math> richtig oder falsch umschreibt.</p> <p>R    F</p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>\sum_{k=12}^{50} 2k^2</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>\sum_{k=6}^{25} (2k)^2</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>\sum_{k=0}^{19} (12 + 2k)^2</math></p> <p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <math>\sum_{k=144}^{2500} (\sqrt{k})^2</math></p>	<p><u>  / 3 P  </u></p>

**Aufgabe 2: Folgen und Reihen**

**(12 Punkte)**

a) Berechnen Sie für die Folge

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{4} \quad \text{mit } a_1 = 1$$

die ersten fünf Folgenglieder  $(a_1, a_2, \dots, a_5)$ .

12 P

$n$	1	2	3	4	5
$a_n$					

b) Entscheiden Sie ob der Grenzwert der Folge

$$b_n = \frac{n^5 - 2n^2 + 3}{9n - 2n^4 - 11n^5}$$

für  $n \rightarrow \infty$  existiert. Falls er existiert, welchen Wert hat dieser Grenzwert?

12 P

**Aufgabe 2: Fortsetzung**

c) Betrachten Sie die Folge:

$$c_n = c_{n-1} + 2 \quad \text{mit } c_1 = 3$$

c1) Berechnen Sie für die Folge  $c_n$  die ersten fünf Folgenglieder  $(c_1, c_2, \dots, c_5)$ : 12 P

$n$	1	2	3	4	5
$c_n$					

c2) Geben Sie für die Folge  $c_n$  eine explizite Definition an. 12 P

**Aufgabe 2: Fortsetzung**

d) Betrachten Sie die Folge:

$$d_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}}$$

d1) Geben Sie für die Folge  $d_n$  eine explizite Definition an.12 Pd2) Berechnen Sie für die Folge  $d_n$  den Grenzwert:12 P

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

**Aufgabe 3: Finanzmathematik****(13 Punkte)**

Hinweis: Die Teilaufgaben a) und b) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- a) Herr Meier möchte sparen und hat sich als Sparziel vorgenommen, heute in sieben        / 5 P Jahren CHF 100'000 auf dem Konto zu haben.

Um dieses Ziel zu erreichen zahlt er heute beginnend und dann jeweils ein Jahr später insgesamt sechs Mal CHF 14'000 auf ein Konto mit einem Zinssatz von 2.0% p.a. ein.

Welchen weiteren Betrag muss er heute in sechs Jahren einzahlen, um sein Sparziel in sieben Jahren zu erreichen?

**Aufgabe 3: Fortsetzung**

- b) Frau Beck zahlt jeweils am Jahresanfang insgesamt zehnmal je CHF 3'000 auf ein Konto ein. Das Konto wird in den ersten fünf Jahren jährlich zu 2% verzinst, danach erhöht sich der Zinssatz auf 3% p.a.        / 5 P

Welchen Geldbetrag könnte Frau Beck nach 10 Jahren von ihrem Konto abheben?

**Aufgabe 4: Funktionen und ihre Eigenschaften**

**(13 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\sqrt{x+1} + 3$$

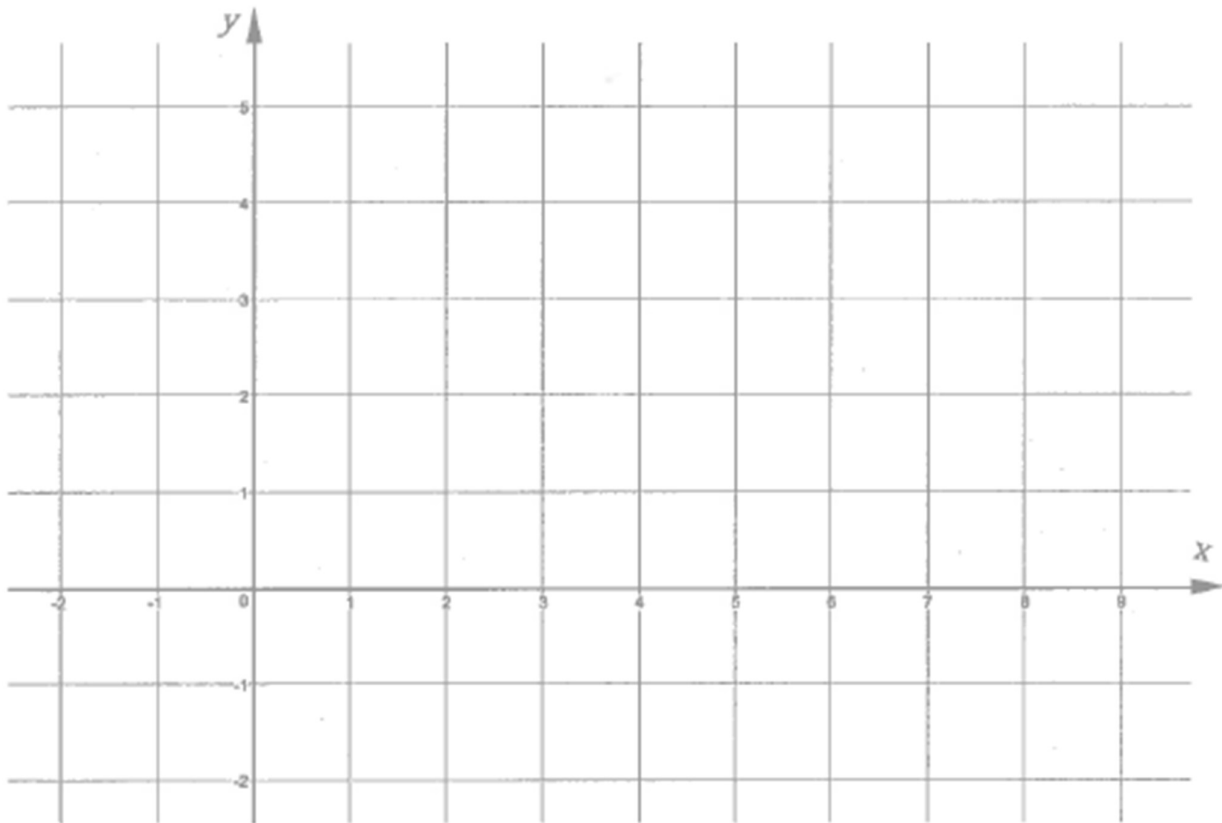
und das Intervall

$$D = [-1; 8],$$

welches für diese Aufgabe den Definitionsbereich von  $f$  darstellt.

- a) Zeichnen Sie handgenau den Graphen von  $f$  unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs im unten vorgegebenen Koordinatensystem ein.

    / 4 P



- b) Bestimmen Sie das Bild von  $f$  unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs.

    / 2 P



c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

12 P

d) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

12 P

e) Bestimmen Sie die Verkettung  $(g \circ f)(x)$ , wobei  $g(x) = (x-3)^2$ .

13 P

## Aufgabe 5: Elementare Funktionen

(12 Punkte)

a)	Gegeben ist die Funktion: $g(x) = 4x^3 - 16x$ Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. R    F <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $g(x)$ ist umkehrbar.  <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $g(x)$ hat genau zwei Nullstellen: $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$  <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für positive $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) = g(-x)$  <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$	<u>    </u> / 3 P
b)	Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. R    F <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$  <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(x)$ hat genau zwei Nullstellen: $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$  <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $f(1) = \frac{1}{2}$	<u>    </u> / 3 P

**Aufgabe 5: Fortsetzung**

<p>c)</p>	<p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R    F</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> Quadratische Funktionen haben immer Nullstellen.</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> Kubische Funktionen haben mindestens 1 Nullstelle.</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> Die lineare Funktion <math>f(x) = m \cdot x + b</math> hat 1 Nullstelle, falls <math>m \neq 0</math>.</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> Die identische Funktion <math>f(x) = x</math> hat mit jeder Polynomfunktion mindestens einen Schnittpunkt.</p>	<p><u>    </u> / 3 P</p>
<p>d)</p>	<p>Gegeben ist die Kostenfunktion <math>K</math> in Abhängigkeit von der Stückzahl <math>x</math>:</p> $K(x) = 1'000 \cdot e^{0.002x} + 10'000$ <p>(GE bedeutet Geldeinheiten und ME Mengeneinheiten.)</p> <p>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.</p> <p>R    F</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> Die Fixkosten betragen 11'000 GE.</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> Für <math>x = 500</math> ME gilt: Die Durchschnittskosten betragen 25.44 GE/ME (auf zwei Nachkommastellen gerundet).</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> <math>K(x)</math> ist nach unten beschränkt.</p> <p><input type="checkbox"/>   <input type="checkbox"/> <math>K(x)</math> ist konvex.</p>	<p><u>    </u> / 3 P</p>

**Aufgabe 6: Ausgewählte ökonomische Anwendungen (10 Punkte)**

- a) Gegeben sind die beiden Kostenfunktionen und ihr gemeinsamer Definitionsbereich  $x \in [0; 100]$ :

\_\_\_\_ / 4 P

$$K_A(x) = 118x + 5'019$$

$$K_B(x) = 36x + 10'021$$

Auf welchem Intervall für die Stückzahl  $x$  ist  $K_A$  günstiger als  $K_B$  und auf welchem Intervall ist  $K_B$  günstiger als  $K_A$ ? Bei welcher Stückzahl  $x$  sind die Kosten gleich?

**Aufgabe 6: Fortsetzung**

b) Ein Monopolist steht einer linearen Nachfragekurve gegenüber:     / 6 P

$$p(x) = -1.5x + 1'800$$

b1) Wie lautet seine Erlösfunktion  $E(x)$ ?     / 2 P

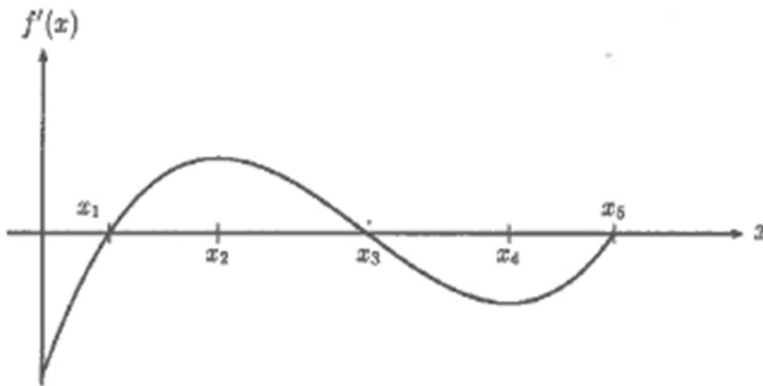
b2) Bei welcher Menge ist sein Erlös maximal?     / 2 P

b3) Wie gross ist der maximale Erlös?     / 2 P

**Aufgabe 7: Grundlagen der Differentialrechnung**

**(12 Punkte)**

- a) Unten ist der Graph von  $f'$ , also die Ableitung der Funktion  $f$ , im Definitionsbereich  $\mathbb{D}_f = [0, x_5]$  dargestellt.



a1) Nennen Sie alle Intervalle, wo die Funktion  $f$  fallend ist. \_\_\_\_\_ / 2 P

a2) Nennen Sie alle Stellen, wo die Funktion  $f$  eine horizontale Tangente besitzt. \_\_\_\_\_ / 2 P

a3) Nennen Sie die Stelle, wo die Funktion  $f$  die grösste Steigung besitzt. \_\_\_\_\_ / 1 P

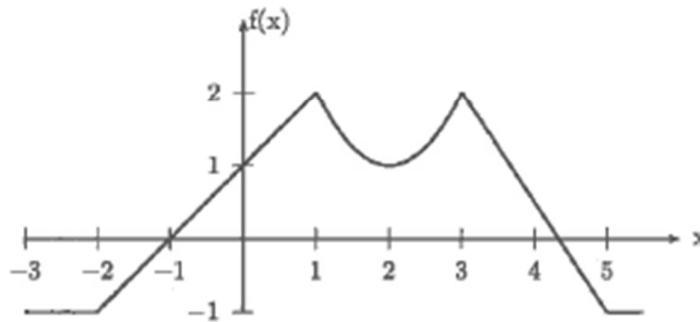
a4) Nennen Sie die Stelle, wo die Funktion  $f$  die kleinste Steigung besitzt. \_\_\_\_\_ / 1 P

**Aufgabe 7: Fortsetzung**

- b) Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = x^3 - x + 1$ . Bestimmen Sie an der Stelle  $x = 1$  die Gleichung der Tangente  $T(x)$ .

    / 3 P

- c) Unten dargestellt ist der Graph der Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R}$ .



Markieren Sie zwei Orte auf dem Graphen, wo  $f$  nicht differenzierbar ist und erklären Sie kurz, was dort schief geht.

    / 3 P

## Aufgabe 8: Eingangskompetenzen

(9 Punkte)

a)	Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gilt: Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. R    F <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\frac{b - a}{a - b} = \frac{1}{a + b}$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(a - b)^2 = (b - a)^2$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$	<u>      </u> / 3 P
b)	Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. R    F <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Für alle $x, y > 0$ gilt $\log(x + y) = \log(x) \cdot \log(y)$ . <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10) = \log(2) + \log(3) + \dots + \log(10)$ . <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\left(\frac{1}{x + y}\right)^2 = x^{-2} + y^{-2}$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(27x^3y^9)^{\frac{1}{3}} = 27xy^3$	<u>      </u> / 3 P
c)	Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. R    F <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(x^3x^{-2})^2x^{-2} = x$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(x^2x^{-3})^2x^2 = 1$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(x^{0.5}x^{-2})^2x^2 = x$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(x^2x^{-0.5})^{-2}x^3 = 1$	<u>      </u> / 3 P

ENDE DER PRÜFUNG